МКОУ Шаумяновская ООШ

Директор МКОУ
«Шаумяновская ООШ» **В. Г. Махмудова**

«Метод рационализации и его использование при решении неравенств»

Подготовила: Магомедова П. А.

Решение неравенств—один из основных разделов математики, изучаемых в курсе школьной программы. Вариант единого государственного экзамена по профильной математике также содержит задание на решение неравенства. Это задание №14. Оно относится к заданиям повышенного уровня сложности и даёт возможность получить 2 первичных бала за полное обоснованное решение. Обратимся к статистике:

Как мы видим не выполняют задание вовсе 84.9% учеников, на 1 балл выполняют 4.6%, и на 2 балла—10.5%; учеников. Результаты неутешительны.

Не смотря на то что задание не самое трудное, процент его выполнения очень низкий. Это связано с тем, что зачастую неравенство в варианте ЕГЭ содержит иррациональные функции и выражения, преобразование которых, с последующим решением стандартным методом является весьма трудоёмкой задачей.

Решение данной проблемы лежит на поверхности. Очевидно, что одно и то же неравенство можно решить несколькими способами. Удачно выбранным способом или, как мы привыкли говорить, рациональным способом любое неравенство решится быстро и легко, решение его получится красивым и интересным. Один из таких способов—это способ, выведенный относительно недавно, а потому еще не получивший отражения в школьной программе. Однако он хорошо применим к решению неравенств, и делает их решения намного проще. Этот способ получил название «Метод рационализации».

Рассмотрим основные(традиционные) методы решения неравенств:

1) сведение неравенств к равносильной системе или совокупности систем
2) расщепление неравенств;
3) метод перебора;
4) метод интервалов;
5) введение новой переменной;
6) использование свойств функции: область определения, ограниченность, монотонность.

Все эти методы хорошо нам знакомы, но часто их применение вызывает затруднение, тогда на помощь приходит новый метод.

Давайте ответим на вопрос, что такое рационализация?

Рационализация, на производстве — поиск более оптимальных способов организации труда, более эффективных способов производства, усовершенствования и упрощения технологического процесса.

Рационализация — приведение чего-либо к рациональному, разумному виду.

Эти понятия косвенно применимы и к нашему методу.

Метод рационализации(он же метод замены множителей; он же метод декомпозиции; он же правило знаков) заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой

неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.
Под знаком $\vee$ подразумевается один из знаков: <=; >=; <; >.

Рассмотрим доказательство метода рационализации на примере логарифмического неравенства общего вида:

$$\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x)$$

Решение неравенства стандартным способом сводится к решение совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) - g(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) - g(x) \leq 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Решение данной системы непростая задача. Используя же метод рационализации получаем следующее выражение:

$(h(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0 \quad (3)$

стоит заметить, что данное выражение справедливо, только при условии существования логарифмов, а значит, мы имеем ограничения:

$h(x)>0$; $h(x)\neq 1$: $f(x)>0$: $g(x)>0$

Естественно решить полученное выражение значительно легче, чем исходное неравенство или полученную совокупность.

Давайте убедимся что совокупность равносильна полученному выражению.

Совокупность имеет при учете ОДЗ следующее решение

$$\begin{cases} h(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) < 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Выражение (3) при учете ОДЗ имеет следующее решение

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) < 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Как мы видим решения совпадают при учете ОДЗ.

Почему это происходит?

Рассмотрим функцию $y=\log_a b$: если a>1, то функция возрастает и она тем больше чем больше значение аргумента. За это случай отвечает первая система (1) совокупности. Если 0<a<1, то функция убывающая, за этот случай отвечает вторая система (2).

Переходя к выражению вида $(h(x)-1)(f(x)-g(x))\geq 0$ мы получаем два множителя, первый из которых определяет a>1 или 0<a<1, а второй значения аргумента удовлетворяющих условию неравенства.

$$\log_{h(x)}f(x) \vee \log_{h(x)}g(x) \Leftrightarrow (h(x)-1)(f(x)-g(x)) \vee 0$$

Таким образом метод рационализации позволяет сделать переход от иррациональных трансцендентных функций к простым линейным зависимостям. Но при этом мы теряем всю информацию об условиях существования исходного выражения. Поэтому переход возможен только при учете ОДЗ. Данный метод применим к любым монотонным функциям. Или функциям монотонным на исследуемом интервале области определения функции.

Кратко рассмотрим метод рационализации на неравенстве, содержащем корни:

Рассмотрим, например, выражение $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$, заметим, что оно принимает значение тех же знаков, что и выражение $f(x)-g(x)$ на области определения, ограниченной ОДЗ. Это происходит в силу возрастания функции $y=\sqrt{x}$

Тогда в общем виде имеем рационализацию для квадратного корня:

$$\sqrt{f(x)} \vee \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$$

Метод рационализации степеней:

$$(h(x))^{f(x)}\geq(h(x))^{g(x)}$$

При стандартном методе получаем следующую совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \\ \quad h = 1 \end{array}\right.$$

Используя метод рационализации при учете ОДЗ получаем линейное неравенство вида (h(x)-1)(f(x)-g(x)≥0, доказательство осуществляется по аналогии с логарифмическим неравенством.

$$(h(x))^{f(x)} \vee (h(x))^{g(x)} \Leftrightarrow (h(x)-1)(f(x)-g(x)) \vee 0$$

Таким образом, метод рационализации значительно упрощает решения сложных иррациональных неравенств, сводя их к линейным.

Таблица переходов и следствия метода рационализации.

$\log_h f \vee \log_h g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$\log_h f \vee 1$	$(h-1)(f-h) \vee 0$
$\log_h f \vee 0$	$(h-1)(f-1) \vee 0$
$\log_h f * \log_p g \vee 0$	$(h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0$
$\log_h f + \log_h g \vee 0$	$(h-1)(fg-1) \vee 0$
$h^f \vee h^g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$h^f \vee 1$	$(h-1)f \vee 0$
$f^h \vee g^h$	$(f-g)h \vee 0$
$\sqrt{f} \vee \sqrt{g}$	$f \vee g$
$\lvert f\rvert \vee \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g) \vee 0$

(Таблица 1)

5.Алгоритм решения неравенств методом рационализации:

Основываясь на теоретических рассуждениях, проведенных ранее, можно построить алгоритм решения неравенств методом рационализации.

1. Найти область допустимых значений функции, или выписать условия существования функции, (на основе которых будет произведен переход).
2. Привести неравенство к виду представленному в первой колонке таблицы 1.

3. Основываясь на ОДЗ или условии существования функции осуществить переход к виду представленному во второй колонке таблицы1.
4. Решить полученное линейное неравенство любым удобным способом (в основном удобен метод интервалов).
5. Сравнить полученный результат с ОДЗ или условие существования функции и найти пересечения значений.
6. Значения пересечения и есть решение исходного неравенства.

Примеры решения неравенств методом рационализации:

$(x^3-1)(0.25^x-16)(5x^2-9x-2)\le 0$

Заметим, что мы имеем дело только с показательной и квадратичной функцией, а значит, ОДЗ можно не выписывать или написать ОДЗ: x€R.
Неравенство уже представлено в удобном виде(в виде произведения множителей, сравниваемого с нулём), немного преобразуем множители.

$(x^3-1)(0.25^x-16)(5x^2-9x-2)\le 0 \Leftrightarrow (3^x-3^0)(0.25^x-0.25^{-2})(5x^2-9x-2\le 0$

Осуществим следующий переход.

$\Leftrightarrow(3-1)(x-0)(0.25-1)(x-(-2))(5x+1)(x-2)\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2*(-0.75)x(x+2)(5x+1)(x-2)\le 0\Leftrightarrow x(x+2)(x-2)(5x+1)\ge 0$

Решить полученное неравенство методом интервалов не составит труда.

Ответ: x€(-∞; -2] ∪ **[-1/5; 0]** ∪ **[2;** +∞**]**

$\mathrm{Log}_{(x^2-1)}\frac{2x^2+3x-5}{x+1}\le 1$

Выпишем ОДЗ и найдем её:

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1\neq 1 \\ \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1}>0 \end{cases}$$

x€(-2.5:-√2) ∪ (-√2; -1) ∪ (1; √2) ∪ (√2;+∞)

$1=\log_{(x^2-1)}(x^2-1)$, с учетом этого выполним переход ⇔

$\Leftrightarrow(x^2-1-1)\left(\frac{2x^2+3x-5}{x+1}-(x^2-1)\right)\le 0\Leftrightarrow\frac{(x^2-2)(-x^3+x^2+4x-4)}{x+1}\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2(x-1)-4(x-1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-4)(x-1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)(x-1)}{x+1} \geq 0$

Полученное неравенство решим методом интервалов с учетом ОДЗ

Ответ: x€(-2,5;-2] ∪ (-√2;-1) ∪ (1;√2) ∪ [2;+∞)

$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x} \geq 0$, данное неравенство имеет единственное условие, при котором оно имеет смысл: $x \neq 0$

Преобразуем выражение

$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-3^2}{x} \geq 0$, воспользуемся рационализацией степеней, получим $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(3-1)(|x^2-2x-1|-2)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(|x^2-2x-1|-|2|)}{x} \geq 0$

Воспользуемся теперь рационализацией модулей, получим

$\frac{2(x^2-2x-1-2)(x^2-2x-1+2)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)(x-1)^2}{x} \geq 0$ Решим полученное неравенство методом интервалов и получим ответ:

Ответ: x€[-1;0)∪ {1} ∪ [3; +∞)

Решим еще одно неравенство для закрепления материала.

$\frac{(1-4x^2)^3(\log_5(x+2)-\log_{25} x^2)\sqrt{x^2-1}}{2^{x+1}-8} \leq 0$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+2>0 \\ x^2-1 \geq 0 \\ x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ x€(-2;-1]∪ [1; +∞)

Поясню, что ОДЗ не содержит условия 2^{x+1}-8≠0, так как это условие будет учтено при решении линейного неравенства методом интервалов.

Заметим, что $\log_5(x+2)=\log_{25}(x+2)^2$, применяя метод рационализации, получаем:

$$\frac{(4x^2-1)^3(25-1)((x+2)^2-x^2)\sqrt{x^2-1}}{(2-1)(x+1-3)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)^3(2x+1)^3(x+2-x)(x+2+x)\sqrt{x^2-1}}{x-2} \leq 0$$

Выражение $\sqrt{x^2-1}$ при учете ОДЗ всегда положительно или равно 0, а значит, оно не влияет на знак неравенства, но точки ± 1, эти точки являются решением.

$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)^3(2x+1)^3(2x+2)}{x-2} \leq 0$ Решим неравенство методом интервалов и получим ответ, учитывая ОДЗ и значения ±1, которые также являются решением.

Ответ: x€$\{-1\} \cup [1;2)$.

Неравенства для самостоятельного решения.

1. $\mathrm{Log}_{(x+1)}(x-1) \geq 0$ Ответ: x€[2;+∞)
2. $\mathrm{Log}_{x\wedge 2}(x^2+1)>0$ Ответ: x€(-∞;-1)∪ $(1;+\infty)$
3. $(x^2+3x-10) * \log_{0.5}(x^2-1) * \log_{(x^2-1)}(x+2) \leq 0$

   Ответ: x€(-2;-√2)∪ $\left(-\sqrt{2};-1\right) \cup [2;+\infty)$
4. $\log_{(x-2)}(x+3) \geq \frac{1}{\log_{x^2}(x-2)}$ Ответ: x € $[\frac{1+\sqrt{13}}{2};3)$

Итак, мы рассмотрели, на мой взгляд, один из самых важных методов решения неравенств. Этот метод отличается простотой и удобством в использовании. Он значительно облегчает решение практически любого неравенства. Это метод однозначно обязан знать каждый ученик, который готовится сдаче ЕГЭ. Изучив этот метод, вы скорее всего добавите еще 2 первичных балла к общему результату, а как вы знаете—каждый бал на вес золота. Готовьтесь к ЕГЭ продуктивно, не теряйте свои баллы. А я вам желаю удачи и успеха на ЕГЭ.